NEFN 2

Nový nadpis 14.2.2010

- **Věta.** Buď
  - X Banachův prostor,
  - $A \in \mathcal{L}(X,X) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{L}(X)$,
  - $\|A\| < 1$.

  Pak
  - $(I-A)^{-1}$ je spojitý,
  - $(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$

  ($\sum_{n=0}^{\infty} A^n := \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} A^n$ v $\mathcal{L}(X)$)

Důkaz.

Nejdříve ukážeme, že $S_k := \sum_{n=0}^{k} A^n$ konverguje. Protože X je úplný, je $\mathcal{L}(X)$ úplný. Stačí proto ukázat, že (S_k) je cauchyovská.

Buď $l > k$, pak

$$\|S_l - S_k\| = \left\| \sum_{n=k+1}^{l} A^n \right\| \le \sum_{n=k+1}^{l} \|A^n\| \le \sum_{n=k+1}^{l} \|A\|^n \le$$

($\|T\cdot S\| \le \|T\|\cdot\|S\|$)

$$\le \sum_{n=k+1}^{\infty} \|A\|^n = \frac{\|A\|^{k+1}}{1-\|A\|} \to 0 \text{ pro } k \to \infty$$

($\|A\| < 1$)

Odtud plyne, že posloupnost (S_k) je cauchyovská a proto konvergentní. *dok.!*

- Nyní označme $S := \sum_{n=0}^{\infty} A^n$. Pak

$$(I-A)\cdot S = \lim_{k\to\infty}(I-A)\sum_{n=0}^{k}A^n = \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{k}A^n - \sum_{n=0}^{k}A^{n+1}\right) =$$

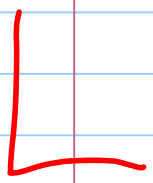
$$= \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{k}A^n - \sum_{n=1}^{k+1}A^n\right) = \lim_{k\to\infty}\left(I - A^{k+1}\right) = I$$

$\lim_{n\to\infty} A^n = 0$

$$S(I-A) = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}A^n\cdot(I-A) = \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{k}A^n - \sum_{n=1}^{k+1}A^n\right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(I - A^{k+1}\right) = I$$

Takže $S = \sum_{n=0}^{\infty}A^n = (I-A)^{-1}$



dod.

- **Definice.** Buď X, Y ... NLP, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$

Definujme operátor $A^*: Y^* \to X^*$ předpisem

$$A^*g := g\circ A, \text{ tzn. } (A^*g)(x) = g(Ax)$$

$(g \in Y^*, x \in X)$

A^* .. duální operátor k A

- **Poznámka:**

$A^*: Y^* \to X^*$ je rovněž lineární, a platí navíc

$$|(A^*g)(x)| = |g(Ax)| \le \|g\| \cdot \|Ax\| \le \|g\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|,$$

je $\boxed{A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)}$

- **Věta.** $A \in \mathcal{L}(X, Y) \Rightarrow \left[A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*),\ \|A^*\| = \|A\|\right]$

- **Příklady**

1) $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ... $\boxed{A \leftrightarrow A| = (a_{ij})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}}}$

$$Ax = y \quad \dots \quad x = (x_1, \dots, x_n),\ y = (y_1, \dots, y_m)$$

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1 \dots m$$

$$A^* \in \mathcal{L}((\mathbb{R}^m)^*, (\mathbb{R}^n)^*) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$

$$\mathbb{R}^m \quad \mathbb{R}^n$$

$$A^* \leftrightarrow A|^* = (a^*_{kl})_{\substack{k=1\dots n \\ l=1\dots m}} \overset{?}{=}$$

$$(A^*y)(x) = y(Ax) = \sum_{i=1}^{m} y_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j y_i = \sum_{j=1}^{n} x_j \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right)}_{\approx A^* y}$$

$A^* y = x \qquad y = (y_1, \dots, y_m), \; x = (x_1, \dots, x_n)$

$$x_j = \sum_{i=1}^{m} a^*_{ji} y_i = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i ,$$

Tedy $a^*_{ji} = a_{ij}$, $\boxed{A^* = A^T}$

---

2) $k = k(x,t) \in C(\langle c,d \rangle \times \langle a,b \rangle)$

$T: L^2(a,b) \to L^2(c,d)$

$$\boxed{(Tu)(x) = \int_a^b k(x,t) u(t) \, dt , \quad x \in \langle c,d \rangle}$$

$T^*: (L^2(c,d))^* \to (L^2(a,b))^*$

$\| \qquad\qquad \|$

$L^2(c,d) \qquad L^2(a,b)$

$$(T^* v)(u) = v(Tu) = \int_c^d v(x) \cdot \left(\int_a^b k(x,t) u(t) \, dt \right) dx =$$

$v \in L^2(c,d)$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b k(x,t) u(t) v(x) \, dt \right) dx =$$

$$= \int_a^b u(t) \left(\int_c^d K(x,t)\, v(x)\, dx \right) dt =$$

$$= \int_c^d v(x) \left(\int_a^b K(t,x)\, u(t)\, dt \right) dx$$

Takže

$$\boxed{(T^* v)(x) = \int_c^d K(t,x)\, v(t)\, dt, \quad x \in \langle a,b \rangle}$$

- **Věta.** Buď X, Y ... NLP, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Pak

(i) $x_n \to x \Rightarrow Ax_n \to Ax$

(ii) existuje-li a omezené A^{-1} existuje a omezené $(A^*)^{-1}$ a platí

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$$

(iii) $\ker A = (\operatorname{Im} A^*)_\perp := \{ x \in X : f \in \operatorname{Im} A^* \Rightarrow f(x) = 0 \}$

($\operatorname{Im} A^*$ je uzavřené)

(iv) $\overline{\operatorname{Im} A} = (\ker A^*)_\perp := \{ y \in Y : f \in \ker A^* \Rightarrow f(y) = 0 \}$

(Důkaz je založen na Hahn–Banachově větě)

• **Poznámka.** Kdyby byl obor hodnot $\operatorname{Im} A$ uzavřený (tzn. $\operatorname{Im} A = \overline{\operatorname{Im} A}$), pohybovalo by nám tvrzení (iv) postačující podmínky pro řešitelnost rovnice

$$Ax = y.$$

Proto je zajímavá následující věta:

• **Věta** Buď
- X, Y ... Banachovy prostory,
- $A \in \mathcal{L}(X,Y)$,
- A je prosté.

Pak

$$\boxed{\operatorname{Im} A \text{ je uzavřená} \iff \exists c > 0\ \forall x \in X : \|Ax\| \geq c\|x\|.}$$

Důkaz. $\Rightarrow$ plyne přímo z Banachovy věty o otevřeném zobrazení

($\operatorname{Im} A$ je uzavřený podprostor Banachova prostoru, a proto Banachův prostor; A zobrazuje X na $\operatorname{Im} A$)

$\Leftarrow$

Buď $Ax_n \to y$. Pak (Ax_n) je cauchyovská, a protože $\|Ax_n - Ax_m\| = \|A(x_n - x_m)\| \geq c\|x_n - x_m\|$,

je i (x_n) cauchyovská. Odtud plyne (X je Banach.), že $x_n \to x$ (pro nějaké x). Protože A je spoj. na X, je $Ax_n \to Ax$. Zjistili jsme, že z předpokladu $Ax_n \to y$ plyne, že ex. x takové, že $Ax_n \to Ax$.

Odtud $y = Ax \in \operatorname{Im} A$ cbd.

- **Definice.** Buď X NLP. Řekneme, že množina $M \subset X$ je kompaktní, lze-li z každé posloupnosti $(x_n) \subset M$ vybrat konvergentní podposloupnost, jejíž limita patří do M.

- **Pozorování.** Zřejmě platí

$$M \subset X \text{ je kompaktní} \implies M \text{ je uzavřená a omezená}$$

(Pozor! Implikaci lze obrátit pouze tehdy, je-li $\dim X < \infty$)

- **Definice.** Buď X, Y NLP a $T: X \to Y$ lineární (na X).

Řekneme, že operátor T je kompaktní, je-li obraz každé omezené množiny kompaktní, tj.

$$T \text{ je kompaktní} \iff \left[M \subset X \text{ je omezená} \Rightarrow \overline{T(M)} \text{ je kompaktní} \right]$$

- **Pozorování.** Buď $T: X \to Y$ lineární. Pak

T je kompaktní právě tehdy, existuje-li pro každou omezenou posloupnost $(x_n) \subset X$ podposloupnost (x_{n_k}) taková, že posloupnost (Tx_{n_k}) je konvergentní v Y.

- **Věta.** Je-li lineární operátor $T: X \to Y$ kompaktní, je spojitý.

Důkaz. $\overline{T(\overline{U(0,1)})}$ je kompaktní, a proto je

$T(\overline{U(0,1)})$ omezená $\Rightarrow \exists c > 0 \ \forall x \in X, \|x\| \leq 1:$

$$\|Tx\| \leq c$$

Odtud plyne

$$\forall x \in X \setminus \{0\}: \ \left\| T \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq c \Rightarrow \|Tx\| \leq c\|x\|$$

Protože rovněž zřejmě platí $\|T0\| = 0 = c \cdot \|0\|$, je T omezený, a proto spojitý. dok.

- **Označení.** X, Y .. NLP

$\mathcal{C}(X,Y)$ ... množina všech lineárních kompaktních operátorů z X do Y

- **Věta (některé vlastnosti kompakt. operátorů)**

(i) $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, $\dim \operatorname{Im} T < \infty$ $\Rightarrow T \in \mathcal{C}(X,Y)$,

(ii) $A \in \mathcal{C}(X,Y)$, $B \in \mathcal{L}(Y,Z)$ $\Rightarrow B \circ A \in \mathcal{C}(X,Z)$,

(iii) $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, $B \in \mathcal{C}(Y,Z)$ $\Rightarrow B \circ A \in \mathcal{C}(X,Z)$,

(iv) Y je Banachův, $(T_n) \subset \mathcal{C}(X,Y)$, $T_n \to T$ v $\mathcal{L}(X,Y)$ $\Rightarrow T \in \mathcal{C}(X,Y)$,

(v) $T \in \mathcal{C}(X,Y)$, $x_n \to x$ v X $\Rightarrow Tx_n \to Tx$ v Y.

- **Příklad.** $K = K(x,t) \in C(\langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle)$

$X = C(\langle 0,1\rangle)$, $\|u\| = \sup_{x\in\langle 0,1\rangle} |u(x)|$

$T : X \longrightarrow X$

$$(Tu)(x) := \int_0^1 K(x,t)\, u(t)\, dt$$

Pak T je kompaktní

Dk. je založen na Arzela–Ascoliho větě

- **Příklad.** $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ měřitelná množina

$K \in L^2(\Omega \times \Omega)$, $X = L^2(\Omega)$, $T : X \to X$

$$(Tu)(x) := \int_\Omega K(x,t)\, u(t)\, dt$$

Pak T je kompaktní.

Důkaz. Buď (u_n) omezená v X ... reflexivní prostor

$\Downarrow$

existuje podprostor prost (u_n) – značíme ji stejně – a $u \in X$ tak, že $u_n \rightharpoonup u$. Z Fubiniho věty plyne, že $K(x,\cdot) \in L^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^*$ pro s.v. x $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (Tu_n)(x) = \int_\Omega K(x,t)\, u_n(t) \longrightarrow \int_\Omega K(x,t)\, u(t) = (Tu)(x)$$

Navíc $|Tu_n(x) - Tu(x)| \leq \int_\Omega |K(x,t)| \cdot |u_n(t) - u(t)|\, dt$

$\leq$

$$\leq \|u_n(t) - u(t)\|_{L^2(\Omega)} \cdot \sqrt{\int_\Omega |K(x,t)|^2 dt} \leq c \cdot \sqrt{\int_\Omega |K(x,t)|^2 dt}$$

Stačí konvergentní posl. je omezená

A z Lebesgueovy věty aplikované na $f_n(x) := (Tu_n(x) - Tu(x))^2$ plyne, že

$$\|Tu_n - Tu\|_{L^2(\Omega)} \to 0$$

cbd.

- Příklad. $W^{1,2}(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega)$

$$W^{1,2}((a,b)) \subset\subset C(\langle a,b \rangle)$$

- **Věta (Schauder).**

Buď • X, Y Banachovy prostory
• $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Pak
A je kompaktní $\iff$ A^* je kompaktní

- **Věta (Riesz – Schauderova teorie)**

Buď X Banachův prostor, $A \in \mathcal{L}(X, X)$.
Pak

(i) $\operatorname{Im} A$ je uzavřený $\Rightarrow \dim \operatorname{Im} A < \infty$,

(ii) $\dim \ker (I - A) < \infty$,

(iii) $\operatorname{Im} (I - A)$ je uzavřený,

(iv) $\operatorname{Im} (I - A) = X \iff \ker (I - A) = \{0\}$

(viz. Fredholmova alternativa)

(v) $\dim \ker (I - A) = \dim \ker (I^* - A^*)$

• **Poznámka.** Uvažujme operátorovou rovnici

$$Au = v, \quad \text{kde } A \in \mathcal{C}(X,X), \quad X \text{ je Banachův}$$

Říkáme, že úloha $Au = v$ je korektní, je-li A prosté a A^{-1} spojité.

Podíváme-li se na tvrzení (i) a (iii) z předchozí věty a na Pozorování na Straně 14 souboru NEFN 1, uvidíme, proč je někdy rozumnější uvažovat rovnice tvaru

$$u - Au = v$$

než tvaru

$$Au = v.$$

Je-li A integrální operátor, nazývá se rovnice

$$Au = v$$

integrální rovnicí prvního druhu;

a rovnice

$$u - Au = v$$

integrální rovnicí druhého druhu.